Química: 21-09-2015

TEMA 1: INTRODUCCIÓN. LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Algunos conjuntos de números:

1) Los números "naturales"

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

2) Los números "enteros"

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

3) Los números "racionales" o "fraccionarios"

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \quad \text{con } n, m \in \mathbb{Z} \text{ y } m \neq 0 \right\}$$

Ejemplos:

$\frac{7}{-2} = -3.5$ nº decimal con un nº finito de cifras decimales

$\frac{2}{3} = 0.\widehat{6} = 0.666\dots$

nº decimal periódico

4) Los números "reales". Son todos los números anteriores, incluidos los decimales periódicos y no periódicos.

Ejemplos: $\pi = 3.141592$

$e = 2.71\dots$

$\sqrt{2} = 1.41\dots$

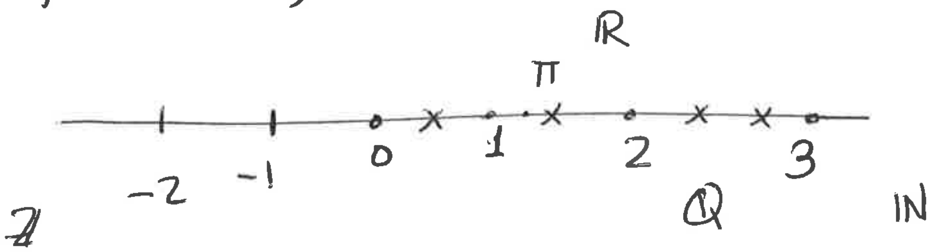
A los números reales que no son racionales se les llama "irracionales".

Se tienen las inclusiones

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\uparrow$ se lee "está contenido"

Gráficamente,



$\mathbb{R}$ es una recta sin agüjeros. Se habla de la "recta real".

LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Origen histórico: en 1545 Cardano estudió las soluciones de la ecuación

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100-160}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{\cancel{60}-60}}{2}$$

Gauss introduce la notación $i = \sqrt{-1}$ (imaginario).

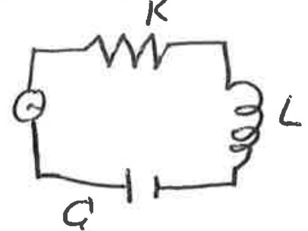
Actualmente, los nos complejos son una herramienta básica en algunos campos de la Ingeniería, p.e., Electricidad.

Impedancia compleja

frecuencia

$$\vec{Z} = R + (\omega L - \frac{1}{\omega C})\, j \qquad , j = i = \sqrt{-1}$$

resistencia   bobina   capacitador



<u>Definición</u> Se llama "cuerpo" de los números complejos al conjunto

$$\mathbb{C} = \{ (x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$$

donde tenemos definidas dos operaciones:

(a) Suma: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

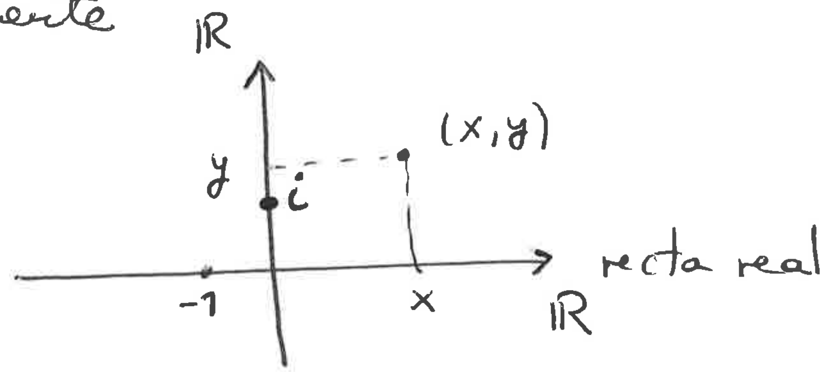
$$\underbrace{\forall}_{\text{para todo}} (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$$

(b) Producto:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}.$$

Gráficamente



· Se dice que el nº complejo (x,y) es "imaginario puro" si ~~$x=0$~~ su parte real $x=0$.

El nº $(0,1)$ se llama "unidad imaginaria pura" y se denota por

$$(0,1) \equiv \sqrt{-1} \equiv i \equiv \underbrace{j}_{\text{electricidad}}$$

$$i^2 = i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) \equiv \underbrace{-1}_{\text{nº real}}$$

" $i = \sqrt{-1}$ " es sólo una notación.

Los nºs complejos de la forma $(x,0)$ se identifican con el nº real x. En este sentido, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

FORMAS DE EXPRESAR UN Nº COMPLEJO

- Forma cartesiana. Dado $z \in \mathbb{C}$,

$$\vec{z} \equiv z = (x,y)$$

Vamos a calcular:

$$\underbrace{(x,0)}_{\equiv x} + \underbrace{(0,1)}_{i} \cdot \underbrace{(y,0)}_{\equiv y} = (x,0) + (0\cdot y - 1\cdot 0,\ 0\cdot 0 + 1\cdot y)$$

$$= (x,0) + (0,y)$$

$$= (x,y)$$

$$= \underset{\text{parte real}}{x} + i \underset{\text{parte compleja}}{y} \equiv \text{forma binómica}$$

- Forma binómica

$$z \in \mathbb{C}, \quad z = x + iy \equiv \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

Las operaciones suma y producto en forma binómica

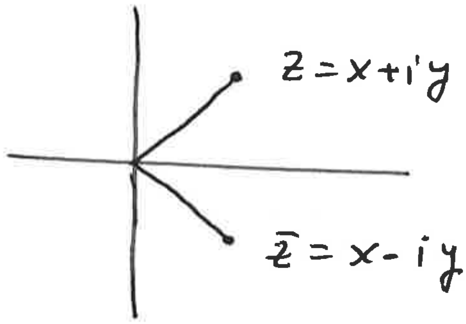
$$\underbrace{(x_1+iy_1)}_{(x_1,y_1)} + (\underbrace{x_2+iy_2}_{(x_2,y_2)}) = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$$

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2$$

$$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Conjugado de un nº complejo

Dado $z = x+iy \in \mathbb{C}$, se llama conjugado de z, denotado $\bar{z}$, al nº complejo $\bar{z} = x-iy$



Propiedades

- $\bar{\bar{z}} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
- $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w} \quad \forall z,w \in \mathbb{C}$.
- $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w} \quad \forall z,w \in \mathbb{C}$
- $z\cdot\bar{z} = (\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

$z = x+iy$

$\bar{z} = x-iy$

$$z\cdot\bar{z} = (x+iy)\cdot(x-iy)$$

$$= x^2+y^2+iyx-iyx$$

Inverso de un nº complejo

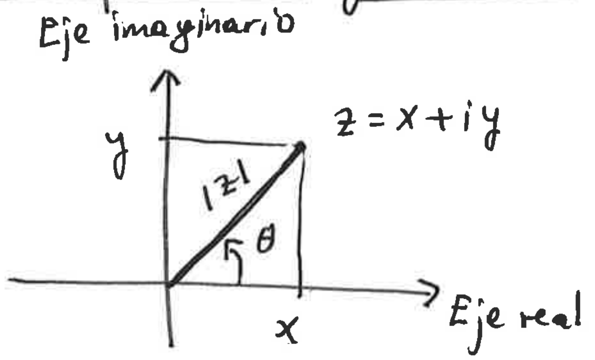
Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se llama inverso de z, denotado z^{-1}, al nº complejo

$$z^{-1} = \frac{1}{z \cdot \bar{z}} \, \bar{z}$$

el cual satisface

$$z \cdot z^{-1} = z \cdot \frac{1}{z \cdot \bar{z}} \, \bar{z} = \frac{z \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = 1$$

Interpretación geométrica de los números complejos



- Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se llama "módulo" de z al número real

$$|z| = +\sqrt{z \cdot \bar{z}} = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

- Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se define el "argumento" de z, denotado $\arg z$, como el conjunto

$$\arg z = \{ \theta \in \mathbb{R} : \operatorname{Re} z = |z| \cos\theta \,,\, \operatorname{Im} z = |z| \operatorname{sen}\theta \}.$$

Si $\theta \in \arg z$, entonces $\theta + 2k\pi \in \arg z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Al único $\theta \in \arg z$ tal que $\theta \in [0, 2\pi[$, se le llama argumento principal de z.

Por tanto,

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = |z| \cos\theta + i\,|z| \operatorname{sen}\theta$$

$$= |z| \,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

$$= |z|\, e^{i\theta}$$

donde, por definición, $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$.

La forma anterior de expresar z, es decir, $z = |z| e^{i\theta}$ se llama "forma exponencial", o "trigonométrica". Esta forma es equivalente a dar el módulo y el argumento principal, $z = |z|_\theta$ que se llama "forma polar".

~~En resumen~~ Las formas exponencial y polar están especialmente diseñadas para hacer las operaciones producto y cociente de nos complejos. En efecto:

$$z_1 = |z_1|\, e^{i\theta_1}$$

$$z_2 = |z_2|\, e^{i\theta_2}$$

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^x \cdot e^{-y} = e^{x-y}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,|z_2|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$ (Los módulos se multiplican y los argumentos se suman)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\, e^{i\theta_1}}{|z_2|\, e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$ (los módulos se dividen y los argumentos se restan)

En resumen:

Forma cartesiana : $z = (x, y)$

" binómica : $z = x + iy$

} suma y resta

" exponencial : $z = |z| e^{i\theta}$

" polar : $z = |z|_\theta$

} producto y cociente.

¿Cómo pasar de una forma a otra?

binómica $\longrightarrow$ exponencial

$$z = x + iy \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} |z| = +\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases}$$ ojo! Calculadora

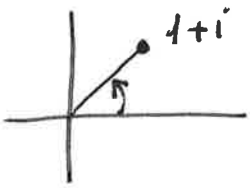
exponencial $\longrightarrow$ binómica

$$z = |z| e^{i\theta} \quad \longrightarrow \quad z = |z|\cos\theta + i\,|z|\,\text{sen}\,\theta$$

Ejemplos

Ejercicio 4.

a) $1+i$

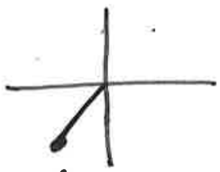


$$|1+i| = +\sqrt{1^2+1^2} = +\sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan \frac{1}{1} = 45^\circ \equiv \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

$$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}_{45^\circ}$$

$-1-i$



$-1-i$

$$|-1-i| = +\sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arctan \frac{-1}{-1} = 45^\circ = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \text{ rad.}$$

$$\begin{array}{r} +180 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$-1-i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}_{\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}_{225^\circ}$$

Ej. 5

$$1_{\pi} = 1 \cdot e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1$$

$$2_{\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\cos\frac{\pi}{3} + i2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}$$

Cálculo de las raíces n-ésimas de un nº complejo.

$$x^3 + 1 = 0 \to x = (+1)^{1/3} = \sqrt[3]{+1} = ??$$

Def. Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima, $n \in \mathbb{N}$, de z si $w^n = z$.

El conjunto de ~~ra~~ las raíces n-ésimas de z se denota por $z^{1/n}$, esto es,

$$z^{1/n} = \{ w \in \mathbb{C} : w^n = z \}.$$

Si $\underbrace{z = |z| e^{i\theta}}_{\text{dato}}$, $\underbrace{w = |w| e^{i\phi}}_{\text{incógnita}}$

$$w^n = |w|^n e^{in\phi} = |z| e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow |w|^n = |z| \Rightarrow |w| = |z|^{1/n}.$$

$$n\phi = \theta + 2k\pi \to \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} < 2\pi$$

$$\theta + 2k\pi < 2\pi n, \quad k = 0, 1, .., n-1$$

Por tanto, $z^{1/n} = \{ w = |z|^{1/n} e^{i\phi},\ \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},\ k = 0, .., n-1 \}$

Ejemplo

Resuelve la ecuación $X^3 - 1 = 0$. en $\mathbb{C}$.

Buscamos $w \in \mathbb{C}$: $w^3 = 1 = 1 e^{i0}$

$w = |w| e^{i\phi}$

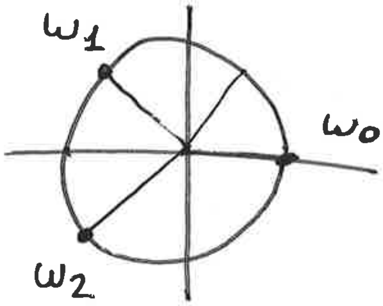
$|w|^3 = 1 \to |w| = 1$

$\phi = \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$

$\phi_0 = 0$

$\phi_1 = \frac{2\pi}{3}$

$\phi_2 = \frac{4\pi}{3}$

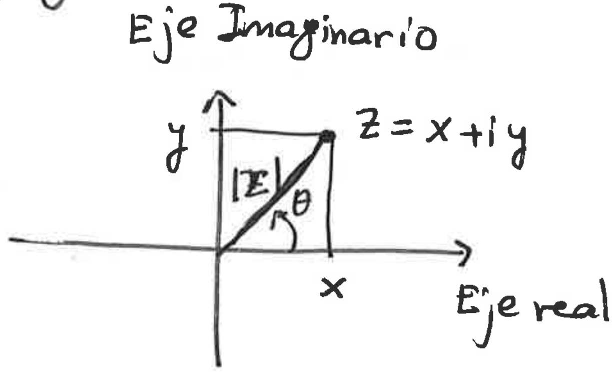


$$\boxed{\begin{aligned} w_0 &= 1 \\ w_1 &= e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ w_2 &= e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{aligned}}$$

RESUMEN-ESQUEMA NÚMEROS COMPLEJOS

- Formas de expresar un nº complejo

  - Cartesiana $z = (x, y)$
  - Binómica $z = x + iy$
  - Exponencial $z = |z| e^{i\theta}$
  - Polar $z = |z|_\theta$



- ¿Cómo pasar de una forma a otra?

  Binómica $\longrightarrow$ Exponencial

$$z = x + iy \longrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (\pm \pi ?) \end{cases}$$

  Exponencial $\longrightarrow$ Binómica

$$z = |z| e^{i\theta} \longrightarrow z = |z| \underbrace{(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}_{e^{i\theta}}$$

- Operaciones con nºs complejos

  - Suma: $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

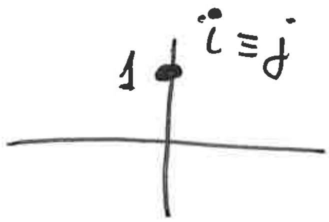
  - Producto/cociente: $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}, \quad z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

- Algunos nos complejos destacados

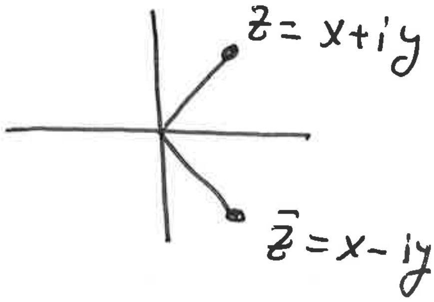
  - $i \equiv j \equiv (0,1) = e^{i\frac{\pi}{2}} = 1_{90^\circ}$



  - Conjugado

$$z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy$$

$$z = |z| e^{i\theta} \rightarrow \bar{z} = |z| e^{-i\theta}$$



  - Inverso

$$z \neq 0, \qquad z^{-1} \equiv \frac{1}{z} = \frac{1}{z \cdot \bar{z}} \, \bar{z}$$

- Raíces n-ésimas de un no complejo

$z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

$$z^{1/n} = \{ w \in \mathbb{C} : w^n = z \}$$

$$= \{ w = |w| e^{i\phi} : |w| = |z|^{1/n}, \; \phi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \; k = 0, .., n-1 \}$$